Suites de fonctions

→ $f_n \xrightarrow{CVS} f \iff \forall x\ f_n(x) \to f$

↳ $f_n \xrightarrow{CVU} f \iff \|f_n - f\|_\infty \to 0$

→ Dini : $f_n \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, X compact, $f_n(x) \nearrow f(x)\ \forall x \in X$

Alors $f_n \xrightarrow{CVU} f$ (fermés emboîtés)

↳ croissance, convexité...

$\xrightarrow[TTU]{\mathcal{C}^0}$ $\forall n\ f_n\ \mathcal{C}^0$ et $f_n \xrightarrow{CVU} f \Rightarrow f\ \mathcal{C}^0$ (version globale)

$\xrightarrow[TTU]{inter}$ $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f_n(x) = \lambda_n$, $\lambda_n \to \lambda = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$ (interversion)

$\xrightarrow[TTU]{integ}$ $f_n \to CVU\ f \Rightarrow \int_a^b f_n \to \int_a^b f$ ⚠ $[a,b]$ segment borné

$\xrightarrow[TTU]{Der}$ * $\exists a\in I\ (f_n(a))$ CV

P36 * $\forall S \subset I$ $f'_n|_S$ CVU vers $g|_S$ $\Rightarrow f_n \xrightarrow[S\subset I]{CVU} f$, $f\ \mathcal{C}^1$, $f' = g$

→ $f_n \xrightarrow{CVU} f$, $x_n \to a \Rightarrow f_n(x_n) \to f(a)$

→ Critère de Cauchy unif : $f_n : X \to E$

f_n CVU $\Longrightarrow \overbrace{\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\varepsilon, m \geq n_\varepsilon\ \|f_m(x) - f_n(x)\| < \varepsilon}^{*}$ $\forall x$

E complet et (*) $\Rightarrow f_n$ CVU

↳ E complet, $f_n \xrightarrow[A]{CVU} f \Rightarrow f_n \xrightarrow[\bar{A}]{CVU} f$

$\xrightarrow{\text{Dini bis}}$ $f_n \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}\ f_n \nearrow$, $f_n \xrightarrow{CVS} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{CVU} f$

⚠ $\to f\ \mathcal{C}^0$

$\rightarrow \forall n\ f_n$ K-lip, $f_n \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, $f_n \xrightarrow{CVS} f$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{CVU} f$

↳ preuve : subdivision de pas $\delta = \frac{K\varepsilon}{K+1}$, K coeff de lip..

(similaire au th précédent.